8.4 条件付き期待値

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする．

命題 8.4.3 (3.2.1) X, Y を非負値確率変数、$a \geqq 0$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ を部分 σ-加法族とする．この時以下が成立する．

(1) $E[X|\{\emptyset, \Omega\}] = E[X]$.

(2) $E[aX|\mathcal{G}] = aE[X|\mathcal{G}]$ $a.s.$ また $E[X+Y|\mathcal{G}] = E[X|\mathcal{G}] + E[Y|\mathcal{G}]$ $a.s.$

(3) $X \geqq Y$ $a.s.$ ならば $E[X|\mathcal{G}] \geqq E[Y|\mathcal{G}]$ $a.s.$

(4) $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ ならば $E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = E[X|\mathcal{H}]$ $a.s.$

命題 8.4.4 X_n, $n = 1, 2, \ldots$ を非負値確率変数、$\mathcal{G}$ を部分 σ-加法族とする．この時以下が成立する．

(1) すべての $n = 1, 2, \ldots$ に対して $X_n \leqq X_{n+1}$ $a.s.$ が成立すると仮定する．この時、

$$E[\lim_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}] = \lim_{n\to\infty} E[X_n|\mathcal{G}] \ a.s.$$

(2) $E[\varliminf_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}] \leqq \varliminf_{n\to\infty} E[X_n|\mathcal{G}]$ $a.s.$

命題 8.4.5 (3.2.2) X, Y は非負値確率変数、$\mathcal{G}$ は部分 σ-加法族とし、Y は $\mathcal{G}$-可測と仮定する．この時

$$E[YX|\mathcal{G}] = YE[X|\mathcal{G}] \ a.s.$$

が成立する．

命題 8.4.6 (3.2.1) X, Y を可積分確率変数、$a \in \mathbf{R}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ を部分 σ-加法族とする．この時、以下が成立する．

(1) $E[X|\emptyset, \Omega] = E[X]$.

(2) $E[aX|\mathcal{G}] = aE[X|\mathcal{G}]$ $a.s.$ $E[X+Y|\mathcal{G}] = E[X|\mathcal{G}] + E[Y|\mathcal{G}]$ $a.s.$

(3) $X \geqq Y$ $a.s.$ ならば $E[X|\mathcal{G}] \geqq E[Y|\mathcal{G}]$ $a.s.$

(4) $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ ならば $E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = E[X|\mathcal{H}]$ $a.s.$

命題 8.4.7 (3.2.2) X, Y は確率変数、$\mathcal{G}$ は部分 σ-加法族とし、Y は $\mathcal{G}$-可測と仮定する．さらに、 X 及び XY が可積分とする．この時

$$E[YX|\mathcal{G}] = YE[X|\mathcal{G}] \ a.s.$$

が成立する．

命題 8.4.8 (3.2.4) (S_i, Σ_i), $i = 1, 2$, は可測空間で X_i, $i = 1, 2$, は S_i-値確率変数、則ち X_i は Ω から S_i への $\mathcal{F}/\Sigma_i$-可測写像とする．いま、$\mathcal{G}$ は部分 σ-加法族、$f : S_1 \times S_2 \to [0, \infty]$ は $\Sigma_1 \times \Sigma_2$-可測写像とする．さらに、 $\sigma\{X_2\}$ と $\mathcal{G} \vee \sigma\{X_1\}$ は独立とする．この時、

$$E[f(X_1, X_2)|\mathcal{G}] = E[h_f(X_1)|\mathcal{G}]$$

ただし、$h_f : S_1 \to [0, \infty)$ は $h_f(x) = E[f(x, X_2)]$, $x \in S_1$ で与えられる関数である．

8.5　離散時間マルチンゲール

定義 8.5.1 (4.1.1) $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ がフィルトレーションであるとは、
(1) $\mathcal{F}_n$, $n \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$ は $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族
(2) すべての $n \geqq 0$ に対して $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$
が成り立つこと．

定義 8.5.2 (4.1.2) $\{\mathcal{F}_t\}_{n=0}^{\infty}$ はフィルトレーションとする．$X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ が $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$-マルチンゲールであるとは
(1) 各 $n \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$ に対して、X_n は可積分な確率変数で、$\mathcal{F}_n$-可測
(2) $n, m \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$, $n \geqq m$ ならば

$$E[X_n|\mathcal{F}_m] = X_m$$

が成り立つことをいう．

どのフィルトレーション $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ の下で考えているかが明らかな時、$\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$-マルチンゲールを単にマルチンゲールと呼ぶ．

また、劣（優）マルチンゲールも以下のように定義される．

定義 8.5.3 (4.1.2) $\{\mathcal{F}_t\}_{n=0}^{\infty}$ はフィルトレーションとする．$X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ が $\{\mathcal{F}\}_{n=0}^{\infty}$-劣（優）マルチンゲールであるとは
(1) 各 $n \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$ に対して、X_n は可積分な確率変数で、$\mathcal{F}_n$-可測
(2) $n, m \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$, $n \geqq m$ ならば

$$E[X_n|\mathcal{F}_m] \geqq (\leqq) X_m$$

が成り立つことをいう．

命題 8.5.4 (4.1.3) $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$, $Y = \{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ がマルチンゲールであり、$a, b \in \mathbf{R}$ ならば $aX + bY = \{aX_n + bY_n\}_{n=0}^{\infty}$ もマルチンゲール．
(2) $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$, $Y = \{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ が劣（優）マルチンゲールであり、$a, b \geqq 0$ ならば $aX + bY = \{aX_n + bY_n\}_{n=0}^{\infty}$ も劣（優）マルチンゲール．

定理 8.5.5 (4.2.2) (Doob の不等式) $M = \{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ をマルチンゲールとする．この時、$p \in (1, \infty)$ に対して

$$E[\max_{k=0,1,\ldots,n} |M_k|^p]^{1/p} \leqq \frac{p}{p-1} E[|M_n|^p]^{1/p}, \qquad n \geqq 0$$

が成立する．

命題 8.5.6 (4.2.3) $M = \{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ がマルチンゲールであり、$E[M_n^2] < \infty$, $n \geqq 0$, と仮定する。この時、

$$E[(M_n - M_m)^2|\mathcal{F}_m] = E[M_n^2|\mathcal{F}_m] - M_m^2, \qquad n \geqq m \geqq 1,$$

$$E[M_n^2] = E[M_0^2] + \sum_{k=1}^{n} E[(M_k - M_{k-1})^2], \qquad n \geqq 0$$

が成り立つ．

特に、

$$E[\max_{k=0,1,\dots,n} M_k^2] \leqq 4(E[M_0^2] + \sum_{k=1}^{n} E[(M_k - M_{k-1})^2]), \qquad n \geqq 0$$

が成立する。

定義 8.5.7 (5.1.1) σ が ($\mathbf{F}$-) 停止時刻であるとは、σ は Ω 上定義された値を $\mathbf{Z}_{\geqq 0} \cup \{\infty\}$ に値をとる関数で

$$\{\sigma = n\} \in \mathcal{F}_n, \qquad n = 0, 1, \dots,$$

が成り立つことをいう.

命題 8.5.8 (5.1.3) (1) $m \in \mathbf{Z}_{\geqq 0} \cup \{\infty\}$ とする．$\tau \equiv m$、すなわち、τ は恒等的に値 m をとる関数とすると τ は停止時刻.
(2) σ, τ が停止時刻であれば $\sigma \wedge \tau$, $\sigma \vee \tau$, $\sigma + \tau$ も停止時刻．ここで、$\sigma \wedge \tau$ はそれぞれ $(\sigma \wedge \tau)(\omega) = \sigma(\omega) \wedge \tau(\omega)$, $\omega \in \Omega$, で定義される関数である．$\sigma \vee \tau$, $\sigma + \tau$ も同様である.

定義 8.5.9 (5.1.3) 停止時刻 τ に対して、$\mathcal{F}$ の部分集合の族 $\mathcal{F}_\tau$ を次で定義する.

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F};\ \text{すべての } n \in \mathbf{Z}_{\geqq 0} \text{ に対して } A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n \text{ が成立する }\}.$$

命題 8.5.10 (5.1.4) (1) $\mathcal{F}_\tau$ は部分 σ-加法族である.
(2) τ は $\mathcal{F}_\tau$ 可測な関数である.

命題 8.5.11 (5.1.5) σ, τ を停止時刻とする.
(1) $A \in \mathcal{F}_\sigma$ ならば $A \cap \{\sigma \leqq \tau\} \in \mathcal{F}_\tau$ かつ $A \cap \{\sigma \leqq \tau\} \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$.
(2) $\sigma(\omega) \leqq \tau(\omega)$ がすべての $\omega \in \Omega$ に対して成立するならば、$\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$.
(3) $\mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$.
(4) $\{\tau < \sigma\}$, $\{\tau = \sigma\}$, $\{\tau > \sigma\} \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$.

命題 8.5.12 (5.3.4) $M = \{M_n\}_{n=0}^\infty$ はマルチンゲール、σ, τ は停止時刻、$N \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$ とし、$\sigma(\omega) \leqq \tau(\omega) \leqq N$, $\omega \in \Omega$ と仮定する．この時、

$$E[M_\tau | \mathcal{F}_\sigma] = M_\sigma$$

命題 8.5.13 (5.3.5) $X = \{X_n\}_{n=0}^\infty$ は劣マルチンゲール、σ, τ は停止時刻、$N \in \mathbf{N}_0$ とし、$\sigma(\omega) \leqq \tau(\omega) \leqq N$, $\omega \in \Omega$ と仮定する．この時、

$$E[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] \geqq X_\sigma$$

定理 8.5.13 (6.2.1) $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^\infty$ がフィルトレーション、$\{X_n\}_{n=0}^\infty$ が $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^\infty$ -劣マルチンゲールであれば任意の $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ に対して

$$E[U_N(\{X_n\}_{n=0}^\infty; a, b)] \leqq \frac{E[(X_N - a) \vee 0]}{b - a}. \leqq \frac{E[|X_N|] + |a|}{b - a}.$$