数理手法IV演習問題 5

演習問題 5-1．$a,b\in\mathbf{R}$, $a<b$ に対して、(a,b), $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$, $\{a\}$ は $\mathbf{R}$ のボレル加法族（Borel algebra）の元であることを示せ。

演習問題 5-2．$(\Omega,\mathcal{F},P)$ を確率空間、X_n, $n=1,2,\ldots$ は確率変数とする。さらに、$A_n(x)=\{X_n>x\}$, $n=1,2,\ldots$, $x\in\mathbf{R}$, とおく。

以下の事象を $A_n(x)$ 及び集合の記号 $\cup$, $\cap$, ^{c} を高々可算回用いて表せ。

(0) $B_1=\{\omega\in\Omega;\ X_1(\omega)>X_2(\omega)\}$

$B_2=\{\omega\in\Omega;\ X_1(\omega)\geqq X_2(\omega)\}$

(1) $C_1=\{\omega\in\Omega;\ \sup_{n\geqq 1}X_n(\omega)>0\}$

(2) $C_2=\{\omega\in\Omega;\ \sup_{n\geqq 1}X_n(\omega)\geqq 0\}$

(3) $C_3=\{\omega\in\Omega;\ \lim_{n\to\infty}X_n(\omega)=\infty\}$

(4) $C_4=\{\omega\in\Omega;\ \{X_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$ が収束する $\}$ ($=\{\omega\in\Omega;\ \{X_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列 $\}$)

問題の解説と解答例：B_1 は

$$B_1=\bigcup_{x\in\mathbf{R}}\{\omega\in\Omega;\ X_1(\omega)>x\geqq X_2(\omega)\}=\bigcup_{x\in\mathbf{R}}(A_1(x)\cap A_2(x)^c)$$

と表せるが、これでは非可算回 $\cap$ を用いることになる。しかし、

$$B_1=\bigcup_{x\in\mathbf{Q}}(A_1(x)\cap A_2(x)^c)$$

と表せば、可算回ですむ。B_2 はさらに複雑であるが

$$B_2=\{\omega\in\Omega;\ 任意の\ n\geq 1\ に対して\ X_1(\omega)+\frac{1}{n}>X_2(\omega)\}$$

$$=\bigcap_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{x\in\mathbf{Q}}(A_1(x-\frac{1}{n})\cap A_2(x)^c)$$

と表される。

演習問題 5-3．$\Omega,\mathcal{F},P)$ を確率空間とする。$A_n\in\mathcal{F}$, $n=1,2,\ldots$ は「n 回目に硬貨を投げた時、表が出る」という事象を表すものとする。すると、「1 回目、2 回目ともに表が出る」という事象は $A_1\cap A_2$ で表されることになる。では以下の事象を A_n 及び集合の記号 $\cup$ （合併）, $\cap$ （共通部分）, ^{c} （補集合）を高々可算回用いて表せ。

(1) 表が出る回数が有限回であるという事象 B_0

(2) 表が無限回出るという事象 B_1

(3) 表が３回連続して出ることが無限にあるという事象 B_2