

クレジット:

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析 I
2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫

ライセンス:

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。



寄り道

文系分野（社会現象）のどこに線形代数とその手法が登場するのか.

- 1) 統計解析 社会データ, 経済データの解析と計量経済学
データに基づく管理と因子分析
- 2) 最適解の探索と制御
- 3) 確率過程の分析と制御 (Google 行列, 生態系制御, 感染症対策)

固有値・固有ベクトル

連立1次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow$ 固有方程式 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

$A\mathbf{x}$ の意味: 「 A を $\mathbf{x}$ に掛ける」=「線形写像 A による $\mathbf{x}$ の写像」

ほとんどの $\mathbf{x}$ については異なるベクトルが像となる.

幾つかの例外的なベクトル $\mathbf{x}$ については, その方向は変わらず, 大きさのみが変わる.

このような関係を満たす $\mathbf{x}$ を固有ベクトルといい, 対応する大きさの比(拡大率) λ を固有値という.

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \rightarrow (A - \lambda E)\mathbf{x} = 0 \rightarrow \det(A - \lambda E) = 0$$

例1

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$$

の固有値, 固有ベクトルは

$$\det(A - \lambda E) = (0.8 - \lambda)(0.7 - \lambda) - 0.06 = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = (\lambda - 1)(\lambda - \frac{1}{2})$$

であるから固有値は $\lambda_1 = 1$ および $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ となる. それぞれの固有ベクトルは次のように求まる.

$$\lambda = 1: \begin{pmatrix} -0.2 & 0.3 \\ 0.2 & -0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \rightarrow x = 0.3, \quad y = 0.2$$

$$\lambda = \frac{1}{2}: \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \rightarrow x = 1, \quad y = -1$$

$$(A - E)\mathbf{x}_1 = 0 \rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

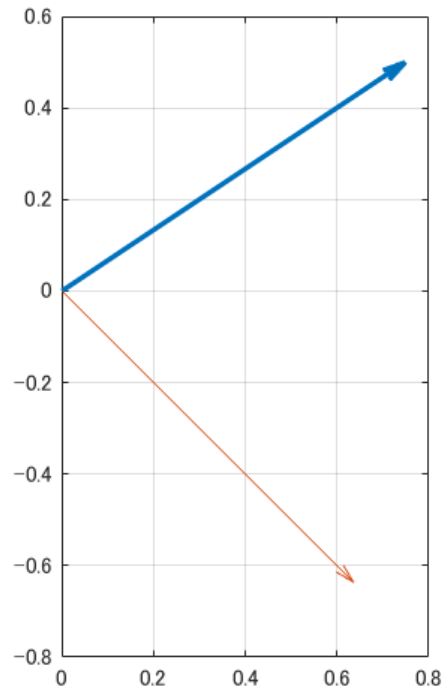
$$(A - \frac{1}{2}E)\mathbf{x}_2 = 0 \rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ここで固有ベクトルの値は定数倍の任意性があることに注意せよ.

ベクトルの長さを1としたものを規格化されたベクトルという.

固有ベクトルは、一般に直交していない。それではどういう場合に直交するのか、これは後で議論する。

```
quiver(0,0,0.8321,0.5547,'LineWidth',2); hold on
quiver(0,0,0.7071,-0.7071); hold on
daspect([1 1 1])
grid on
hold off
```



例2

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

の場合はどうか？

同様に計算をすれば

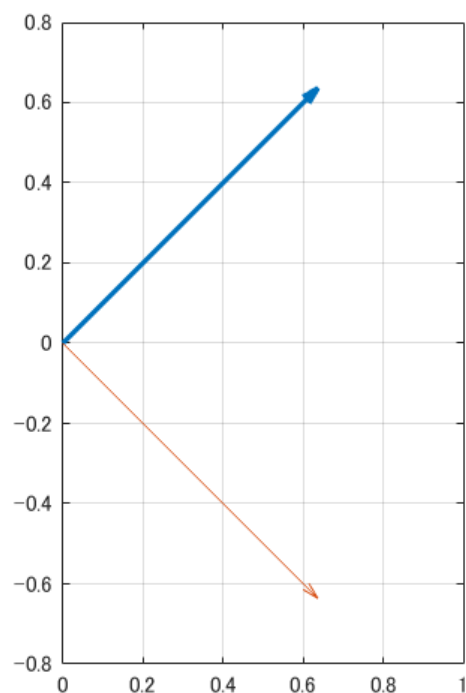
$$\Phi_A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - 5/2 & 1/2 \\ 1/2 & \lambda - 5/2 \end{pmatrix} \rightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda_1 = 2 : \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 : \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

今度は、二つの固有ベクトルは互いに直交する。

```
quiver(0,0,0.7071,0.7071,'LineWidth',2); hold on
quiver(0,0,0.7071,-0.7071); hold on
xlim([0,1])
daspect([1 1 1])
grid on
hold off
```



写像A

例 1 の行列 $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$ に対して一般のベクトル $\mathbf{w}$ を考えてみよう.

任意の2次元ベクトル $\mathbf{w}$ は上の2つの固有ベクトル定数倍の和で書くことができる (この係数は一意的に定まる) .

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (u + v)\mathbf{x}_1 + (0.4u - 0.6v)\mathbf{x}_2$$

これに行列 A を掛ける (A による像) と

$$\begin{aligned} A\mathbf{w} &= A\{(u + v)\mathbf{x}_1 + (0.4u - 0.6v)\mathbf{x}_2\} = \{(u + v)A\mathbf{x}_1 + (0.4u - 0.6v)A\mathbf{x}_2\} \\ &= (u + v) \cdot 1 \cdot \mathbf{x}_1 + (0.4u - 0.6v) \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{w} + (-0.2u + 0.3v)\mathbf{x}_2 \end{aligned}$$

となる.

$\mathbf{w}$ が $\mathbf{x}_1$ または $\mathbf{x}_2$ と並行であれば $A\mathbf{w}$ は方向を変えない. 一方, $\mathbf{w}$ が $\mathbf{x}_1$ または $\mathbf{x}_2$ と並行でなければ, 上で見たように $A\mathbf{w}$ は方向を変える.