1　測度論からの準備

2　測度論的確率論

3　条件付き確率

数理手法 VI　講義資料 3

4　ブラウン運動

4.1　ガウス系

以下では 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の上で考えていく.

定義 4.1 確率変数 X がガウス確率変数であるとは、以下の (1),(2) のどちらかを満たすことをいう.
(1) $m \in \mathbf{R}$, $v > 0$, が存在して、任意の有界な連続関数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ に対して

$$E[f(X)] = (\frac{1}{2\pi v})^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-\frac{(x-m)^2}{2v}) dx$$

が成り立つ.
(2) $m \in \mathbf{R}$ が存在して、任意の有界な連続関数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ に対して

$$E[f(X)] = f(m)$$

が成り立つ.

上記 (1) を満たす確率変数を 平均 m 分散 v のガウス確率変数、(2) を満たす確率変数を 平均 m 分散 0 のガウス確率変数 と呼ぶ.
確率変数 X が平均 $m \in \mathbf{R}$, 分散 $v \geqq 0$ のガウス確率変数である時

$$E[X] = m, \qquad E[(X-m)^2] = v$$

が満たされる.

命題 4.2 $m \in \mathbf{R}$, $v \geqq 0$ とする. 確率変数 X に対して次の 2 条件は同値である.
(1) X は平均 m, 分散 v のガウス確率変数.
(2) 任意の $\xi \in \mathbf{R}$ に対して

$$E[\exp(\sqrt{-1}\xi X)] = \exp(\sqrt{-1}m\xi - \frac{v}{2}\xi^2)$$

が成立する.

証明は関数論とフーリエ変換によりわかるが省略する.
（演習問題 3-1. これを証明せよ.）

命題 4.3 X, Y は確率変数で $E[X^2] < \infty$, $E[Y^2] < \infty$, であれば

$$E[|XY|]^2 \leqq E[X^2]E[Y^2],$$

$$E[(X+Y)^2]^{1/2} \leqq E[X^2]^{1/2} + E[Y^2]^{1/2}$$

が成り立つ.

証明. まず

$$E[|X||Y|] \leqq E[\frac{1}{2}(X^2+Y^2)] < \infty$$

に注意．$t \in \mathbf{R}$ に対して

$$0 \leqq E[(t|X|+|Y|)^2] = t^2E[X^2] + 2tE[|X||Y|] + E[|Y|^2]$$

であるので、最初の不等式を得る．また、

$$E[(X+Y)^2] \leqq E[X^2] + E[Y^2] + 2E[|X||Y|] \leqq (E[X^2]^{1/2} + E[Y^2]^{1/2})^2$$

より後者の不等式を得る．

∎

命題 4.4 $X_n, n = 1, \ldots,$ はガウス確率変数であるとする．X_∞ が確率変数であり、$E[(X_\infty - X_n)^2] \to 0$, $n \to \infty$, であるならば、X_∞ もガウス確率変数となる．

証明. $m_n = E[X_n]$, $v_n = E[(X_n - m_n)^2]$, $n = 1, 2, \ldots,$ とおく．この時、$E[X_n] = v_n + m_n^2$ となる．また、

$$E[X_\infty^2] \leqq E[2((X_\infty - X_n)^2 + X_n^2)] \leqq 2E[(X_\infty - X_n)^2] + 2(v_n + m_n^2) < \infty$$

である．$m_\infty = E[X_\infty]$, $v_\infty = E[(X_\infty - m_\infty)^2]$ とおく．この時、 $E[X_\infty^2] = v_\infty + m_\infty^2$ となる．さらに

$$|m_\infty - m_n| \leqq E[|X_\infty - X_n|] \leqq E[(X_\infty - X_n)^2]^{1/2} \to 0, \qquad n \to \infty,$$

$$|(v_\infty + m_\infty^2)^{1/2} - (v_n + m_n^2)^{1/2}| \leqq |E[X_\infty^2]^{1/2} - E[X_n^2]^{1/2}| \leqq E[(X_\infty - X_n)^2]^{1/2} \to 0, \qquad n \to \infty$$

であるので $m_n \to m_\infty$. $v_n \to v_\infty$, $n \to \infty$, を得る．

さらに、$\xi \in \mathbf{R}$ に対して

$$|E[\exp(\sqrt{-1}\xi X_\infty)] - E[\exp(\sqrt{-1}\xi X_n)]| \leqq |E[\exp(\sqrt{-1}\xi X_\infty)(1 - \exp(\sqrt{-1}\xi(X_n - X_\infty))]|$$

$$\leqq E[|1 - \exp(\sqrt{-1}\xi(X_n - X_\infty))|] \leqq E[|X_n - X_\infty|]$$

$$\leqq E[(X_n - X_\infty)^2]^{1/2} \to 0 \qquad n \to \infty$$

ここで

$$|\exp(\sqrt{-1}t) - 1| = |\int_0^t |\exp(\sqrt{-1}s)ds| \leqq |t|, \qquad t \in \mathbf{R}$$

という事実を使った．よって、

$$E[\exp(\sqrt{-1}\xi X_\infty)] = \exp(\sqrt{-1}m_\infty\xi - \frac{v_\infty}{2}\xi^2), \qquad \xi \in \mathbf{R}$$

を得、主張を得る．

∎

定義 4.5 $\mathcal{X}$ を確率変数の集合とする．以下の条件が成立する時、$\mathcal{X}$ はガウス系であるという．

$\mathcal{X}$ の元の一次結合、$Y = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$, $n \geqq 1$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$, $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{X}$, により得られる確率変数 Y がすべてガウス確率変数である．

命題 4.6 $\mathcal{X}$ をガウス系とする．今、$\mathcal{H}'$ を $\mathcal{X}$ の有限個の元の一次結合全体とする．さらに、$\mathcal{H}$ を以下の条件を満たす確率変数 X 全体の集合とする．

$Y_n \in \mathcal{H}'$, $n = 1, 2, \dots,$ が存在して $E[(X - Y_n)^2] \to 0$, $n \to \infty$ となる．

この時、$\mathcal{H}$ はガウス系である．

証明． 定義より $\mathcal{H}'$ はガウス系であることがわかる．さらに、$\mathcal{H}'$ はベクトル空間である．今、$X, X' \in \mathcal{H}$ ならば $Y_n, Y_n' \in \mathcal{H}'$ が存在して

$$E[|X - Y_n|^2] \to 0, \quad E[|X' - Y_n'|^2] \to 0, \qquad n \to 0$$

となる．この時、

$$E[((aX + a'X') - (aY_n + a'Y_n'))^2]^{1/2} \leqq |a|E[(X - X_n)^2]^{1/2} + |a'|E[(X' - Y_n')^2]^{1/2} \to 0, \quad n \to \infty$$

であるので、$\mathcal{H}$ がベクトル空間であることがわかる．また、$X \in \mathcal{H}$ ならば X はガウス確率変数となるので主張を得る．

∎

命題 4.7 X_n, $n \in \mathbf{Z}_{\geqq 1}$ は独立なガウス確率変数であるとする．この時、$\mathcal{X} = \{X_n;\ n \in \mathbf{Z}_{\geqq 1}\}$ はガウス系である．

証明． $m_n = E[X_n]$, $v_n = E[(X_n - m_n)^2]$, $n \geqq 1$, とする．$a_n \in \mathbf{R}$, $n = 1, 2, \dots$ に対して

$$E[\exp(\sqrt{-1}\xi(\sum_{k=1}^m a_nX_n))] = E[\prod_{n=1}^m \exp(\sqrt{-1}\xi a_nX_n)]$$

$$= \prod_{n=1}^m E[\exp(\sqrt{-1}\xi a_nX_n)] = \exp(\sqrt{-1}\xi(\sum_{n=1}^m a_nm_n - \frac{\xi^2}{2}\sum_{n=1}^m a_n^2v_n)$$

となるので $\sum_{n=1}^m a_nX_n$ ガウス確率変数である．

∎

命題 4.8 $\mathcal{X}$ はガウス系とする．$n \geqq 2$, $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{X}$ であり、$E[X_k] = 0$, $k = 1, \dots, n$, $E[X_kX_\ell] = 0$, $k \neq \ell$, $k, \ell = 1, \dots, n$, ならば $X_1, \dots, X_n$ は独立である．

証明． $v_k = E[X_k^2] \geqq 0$, $k = 1, \dots, n$, とおく．$\xi_k \in \mathbf{R}$, $k = 1, \dots, n$, に対して、

$$E[\sum_{k=1}^n \xi_kX_k] = 0, \quad E[(\sum_{k=1}^n \xi_kX_k)^2] = \sum_{k,\ell=1}^n \xi_k\xi_\ell E[X_kX_\ell] = \sum_{k=1}^n \xi_k^2v_k$$

となる．よって、

$$E[\exp(\sqrt{-1}\sum_{k=1}^{n}\xi_k X_k)] = \exp(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2 v_k) = \prod_{k=1}^{n} E[\exp(\sqrt{-1}\xi_k X_k)]$$

となる．$f_1,\ldots,f_n \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, に対して

$$\hat{f}_k(\xi_k) = \int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\sqrt{-1}\xi_k x)f_k(x)dx, \qquad \xi_k \in \mathbf{R}$$

とおくと、

$$f_k(x_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\sqrt{-1}\xi_k x_k)\hat{f}_k(\xi_k))d\xi_k, \qquad x_k \in \mathbf{R}$$

となるので、

$$E[\prod_{k=1}^{n} f_k(X_k)] = (\frac{1}{2\pi})^n E[\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}\hat{f}_k(\xi_k)\exp(\sqrt{-1}\sum_{k=1}^{n}\xi_k X_k)d\xi_1\cdots d\xi_n]$$

$$= (\frac{1}{2\pi})^n\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}d\xi_1\cdots d\xi_n\prod_{k=1}^{n}\hat{f}_k(\xi_k)E[\exp(\sqrt{-1}\sum_{k=1}^{n}\xi_k X_k)]$$

$$= \prod_{k=1}^{n}E[(\frac{1}{2\pi})\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}_k(\xi_k)\exp(\sqrt{-1}\xi_k X_k)] = \prod_{k=1}^{n}E[f_k(X_k)]$$

これより $a_k \in \mathbf{R}$, $k = 1,\ldots,n$, に対して

$$P(\bigcap_{k=1}^{n}X_k^{-1}((-\infty,a_k)) = E[\prod_{k=1}^{n}1_{(-\infty,a_k}(X_k)] = \prod_{k=1}^{n}E[1_{(-\infty,a_k)}(X_k)] = \prod_{k=1}^{n}P(X_k^{-1}((-\infty,a_k))$$

となり、独立であることがわかる．

∎

4.2 ブラウン運動とその存在

定義 4.9 確率過程 $B:[0,\infty)\times\Omega\to\mathbf{R}^d$ が d-次元標準ブラウン運動（ウィナー過程とも呼ばれる）であるとは、$B(t,\omega) = (B^1(t,\omega),\ldots,B^d(t,\omega))$, $t\in[0,\infty)$, $\omega\in\Omega$, に対して以下の条件を満たすこと．

(1) $B^i(\cdot,\omega)\to\mathbf{R}$, $i=1,\ldots,d$, $\omega\in\Omega$, が連続となること．

(2) $n \geqq 2$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ に対して $B^i(t_k) - B^i(t_{k-1})$, $i = 1,\ldots,d$, $k = 1,\ldots,n$, が独立となる．

(3) $B(0) = 0$ であり、任意の $t > s \geqq 0$, $i = 1,\ldots,d$, に対して $B^i(t) - B^i(s)$ は平均 0 分散 $t - s$ のガウス確率変数となる．

命題 4.10 $\Omega = [0,1)$, $\mathcal{F}$ は $[0,1)$ に含まれるボレル集合全体の集合、P は $[0,1)$ 上のルベーグ測度とする．この時、確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上に d-次元標準ブラウン運動は存在する．

証明． Step 1.　$\eta_n : \Omega \to \{0,1\}$, $n \in \mathbf{Z}_{\geqq 1}$ を

$$\eta_n(\omega) = [2^n \omega] - 2[2^{n-1}\omega], \qquad \omega \in [0,1)$$

で与える．ただし、$[x]$, $x \in \mathbf{R}$ は x 以下の最大整数．この時、

$$\{\omega \in \Omega;\ \eta_1(\omega) = i_1, \eta_2(\omega) = i_2, \ldots, \eta_n(\omega) = i_n\} = [\sum_{k=1}^n \frac{i_k}{2^k}, \sum_{k=1}^n \frac{i_k}{2^k} + \frac{1}{2^n}),$$

$n \geqq 1,\ i_1, \ldots, i_n = 0, 1,$ が成立するので、

$$P(\eta_n = 0) = P(\eta_n = 1) = \frac{1}{2}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

であり、η_n, $n \in Z_{\geqq 1}$ が独立であることがわかる．(演習問題．3-2. これを証明せよ)
　また、

$$\omega = \sum_{k=1}^\infty 2^{-k} \eta_k(\omega), \qquad \omega \in [0,1)$$

が成立する．よって、$Z_n : \Omega \to [0,1]$, $n \in \mathbf{Z}_{\geqq 1}$ を

$$Z_n(\omega) = \sum_{k=1}^\infty 2^{-k} \eta_{2^n(2k+1)}(\omega), \qquad \omega \in \Omega$$

で定義すれば、Z_n, $n \in \mathbf{Z}_{\geqq 1}$ は独立な確率変数列で

$$P(Z_n \in [0,x)) = x, \qquad x \in (0,1)$$

が成立する．(演習問題．3-3.　これを証明せよ)
　$\Phi : \mathbf{R} \to (0,1)$ を標準正規分布の分布関数

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-\frac{y^2}{2}) dy, \qquad x \in \mathbf{R}$$

とすると $\Phi : \mathbf{R} \to (0,1)$ は真に単調増大な連続関数で全単射となる．よって、連続な逆関数 $\Phi^{-1} : (0,1) \to \mathbf{R}$ が存在する．
　$W_{n,m,i}$, $n \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$, $m \in \mathbf{Z}_{\geqq 1}$, $i = 1, \ldots, d$, を

$$W_{n,m,i} = \Phi^{-1}(Z_{2^n 3^m 5^i})$$

で定めると $W_{n,m,i}$, $n \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$, $m \in \mathbf{Z}_{\geqq 1}$, $i = 1, \ldots, d$, は独立なガウス確率変数の族で、その平均は 0, 分散は 1 となる．
　Step 2. $\psi_{n,m} : [0,\infty) \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$, $m \in \mathbf{Z}_{\geqq 1}$, を以下で定義する．

$$\psi_{0,m}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [m-1, m), \\ 0, & t \notin [m-1, m), \end{cases} \qquad m \geqq 1\,,$$

$$\psi_{n,m}(t)=\begin{cases} 2^{(n-1)/2}, & t\in[\frac{2m-2}{2^n},\frac{2m-1}{2^n}),\\ -2^{(n-1)/2}, & t\in[\frac{2m-1}{2^n},\frac{2m}{2^n}),\\ 0, & t\notin[2^{-(n-1)}(m-1),2^{-(n-1)}m),\end{cases}\qquad n,m\geqq 1.$$

この時、$\{\psi_{n,m};\ n\geqq 0,\ m\geqq 1\}$ は $L^2([0,\infty),dt)$ の完全正規直交系をなす．すなわち、

$$\int_0^\infty \psi_{n,m}(t)\psi_{k,\ell}(t)dt=\begin{cases} 1, & n=k,\ m=\ell \text{ の時}\\ 0, & \text{それ以外の時}\end{cases}$$

であり、$0\leqq a<b$ に対して

$$\int_0^\infty |1_{(a,b)}(t)-\sum_{n=0}^N\sum_{m=1}^N(\int_a^b\psi_{n,m}(s)ds)\psi_{n,m}(t))|^2dt\to 0,\qquad N\to\infty$$

が成り立つ．

$\varphi_{n,m}:[0,\infty)\to\mathbf{R},\ n\in\mathbf{Z}_{\geqq 0},\ m\in\mathbf{Z}_{\geqq 1},$ を以下で定義する．

$$\varphi_{n,m}(t)=\int_0^t\psi_{n,m}(s)ds,\qquad t\in[0,\infty),\ n\geqq 0,\ m\geqq 1.$$

容易に

$$|\varphi_{n.m}(t)|\leqq 2^{-(n-1)/2},\qquad t\in[0,\infty),\ n\geqq 0,\ m\geqq 1,$$

であり、

$$\varphi_{0,m}(t)=0,\qquad t\in[0,m-1],\ m\geqq 1,$$

かつ

$$\varphi_{n,m}(t)=0,\qquad t\notin[2^{-(n-1)}(m-1),2^{-(n-1)}m),\ n,m\geqq 1,$$

であることがわかる．従って、任意の $a_m\in\mathbf{R},\ m\geqq 1,$ に対して $\sum_{m=1}^\infty a_m\varphi_{n,m}(t)$ は有限和であり、任意の $N\in\mathbf{Z}_{\geqq 1}$ に対して

$$|\sum_{m=1}^\infty a_m\varphi_{0,m}(t)|\leqq\sum_{m=1}^N|a_m|,\qquad t\in[0,N],$$

$$|\sum_{m=1}^\infty a_m\varphi_{n,m}(t)|\leqq 2^{-(n-1)/2}\max\{|a_m|;\ m=1,\ldots,2^{n-1}N\},\qquad t\in[0,N],\ n\geqq 1$$

となる．さて、$r\geqq 1,\ i=1,\ldots,d,$ に対して確率過程 $X_r^i:[0,\infty)\times\Omega\to\mathbf{R}$ を

$$X_r^i(t)=\sum_{n=0}^r\sum_{m=1}^\infty W_{n,m,i}\varphi_{n,m}(t)\qquad t\in[0,\infty)$$

により定義する．明らかに $X_r^i(t,\omega)$ は t について連続である．さらに、$0\leqq s<t$ に対して

$$X_r^i(t)-X_r^i(s)=\sum_{n=0}^r\sum_{m=1}^\infty W_{n,m,i}\int_s^t\psi_{n,m}(u)du$$

である．

$\mathcal{X}$ を $W_{n,m,i},\ n \geqq 0,\ m \geqq 1,\ i=1,\dots,d,$ の一次結合全体の集合 とおくと、$\mathcal{X}$ はガウス系であり、$X_r(t) \in \mathcal{X}$ となる．

$b > a \geqq 0$ に対して

$$Y_r^i(a,b) = X_r^i(b) - X_r^i(b)$$

とおくと、$Y_r^i(a,b) \in \mathcal{X}$ であり、$E[Y_r^i(a,b)] = 0, b > a \geqq 0, i = 1,\dots,d, E[Y_r^i(a,b)Y_r^j(a',b')] = 0,\ i \neq j,\ i,j = 1,\dots,d,\ b > a \geqq 0,\ b' > a' \geqq 0,$ である．

また、$b > a \geqq 0,\ d > c \geqq 0,$ に対して

$$E[Y_r^i(a,b)Y_i^r(c,d)] = E[(\sum_{n,k=0}^{r}\sum_{m,\ell=1}^{\infty} W_{n,m,i}W_{k,\ell,i}(\int_a^b \psi_{n,m}(t)dt)(\int_c^d \psi_{k,\ell,i}(t)dt)]$$

$$= \sum_{n=0}^{r}\sum_{m=1}^{\infty}(\int_a^b \psi_{n,m}(t)dt)(\int_c^d \psi_{k,\ell,i}(t)dt)$$

となる．特に、$\psi_{n,m}$ が完全正規直交系であったので

$$E[Y_r^i(a,b)Y_r^i(c,d)] \to \int_0^\infty 1_{(a,b)}(t)1_{(c,d)}(t)dt, \qquad r \to \infty$$

がわかる．

さて、 $N, r \in \mathbf{Z}_{\geqq 1}$ に対して

$$\sup_{t\in[0,N]} |X_{r+1}^i(t) - X_r^i(t)| = \sup_{t\in[0,N]} |\sum_{m=0}^{\infty} W_{r+1,m,i}\psi_{r+1,m}(t)| \leqq 2^{-r/2}\max\{|W_{r+1,m,i}|;\ m = 1,\dots,2^rN\}.$$

よって

$$E[\sup_{t\in[0,N]} |X_{r+1}^i(t) - X_r^i(t)|^4] \leqq 2^{-2r}E[\max\{|W_{r+1,m,i}|^4;\ m = 1,\dots,2^rN\}$$

$$\leqq 2^{-2r}\sum_{m=1}^{2^rN} E[|W_{r+1,m,i}|^4] = 3N2^{-r}$$

となるので

$$E[\sum_{r=1}^{\infty}\sup_{t\in[0,N]} |X_{r+1}^i(t) - X_r^i(t)|] \leqq \sum_{r=1}^{\infty} E[\sup_{t\in[0,N]} |X_{r+1}^i(t) - X_r^i(t)|^4]^{1/4} < \infty$$

がわかる．よって、$\Omega_0 \in \mathcal{F}$ を

$$\Omega_0 = \bigcap_{i=1}^{d}\bigcap_{N=1}^{\infty}\{\sum_{r=1}^{\infty}\sup_{t\in[0,N]} |X_{r+1}^i(t) - X_r^i(t)| < \infty\}$$

とおけば、$P(\Omega_0) = 1$ となることがわかる．さて、$B^i : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbf{R},\ i = 1,\dots,d,$ を

$$B^i(t,\omega) = \begin{cases} \lim_{r\to\infty} X_r^i(t,\omega), & \omega \in \Omega_0, \\ 0, & \omega \notin \Omega_0, \end{cases}$$

で定めると、$B^i(t,\omega)$ は t について連続であることがわかり、任意の $n \geqq 1$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, $\xi_{i,k} \in \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, d$, $k = 1, \ldots, n$, に対して

$$E[\exp(\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{n}\xi_{i,k}(B^i(t_k) - B^i(t_{k-1})))]$$

$$= \lim_{r\to\infty} E[\exp(\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{n}\xi_{i,k}(X_r^i(t_k) - X_r^i(t_{k-1})))]$$

$$= \lim_{r\to\infty}\prod_{i=1}^{d} E[\exp(\sqrt{-1}\int_0^{\infty}(\sum_{k=1}^{n}\xi_{i,k}Y_r(t_{k-1},t_k)]$$

$$= \prod_{i=1}^{d}\exp(-\frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n}\xi_{i,k}^2(t_k,t_{k-1})(t))] = \exp(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{n}\xi_{i,k}^2(t_k - t_{k-1}))$$

となることがわかる．よって、 $B = (B^1, \ldots, B^d)$ は d-次元ブラウン運動である．

∎

4.3　確率空間の完備化

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする．$\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}_0(\mathcal{F}, P) \subset \mathcal{P}(\Omega)$ を以下で定義する．ただし、$\mathcal{P}(\Omega)$ は Ω の部分集合全体の集合である．

$$\mathcal{N}_0 = \{A \in \mathcal{P}(\Omega);\ \ P(B) = 0 \text{ となる } B \in \mathcal{F} \text{ が存在して } A \subset B\}$$

必ずしも $\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{F}$ とは限らない．
さらに $\tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{P}$ を

$$\tilde{\mathcal{F}} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega);\ B_0 \subset A \subset B_1,\ P(B_1 \setminus B_2) \text{ となる } B_0, B_1 \in \mathcal{F} \text{ が存在する }\}$$

とおく．この時、以下が成立する．

命題 4.11 (1) 次の 2 条件は同値．
(i) $A \in \tilde{\mathcal{F}}$.
(ii) $B \in \mathcal{F}$, $A_0 \in \mathcal{N}_0$ で $A = B \cup A_0$ となるものが存在する．
(2) $\tilde{\mathcal{F}}$ は Ω 上の　σ-加法族で $\mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{F}}$ となる．
(3) $B_1, B_2 \in \mathcal{F}$, $A_1, A_2 \in \mathcal{N}_0$ が $B_1 \cup A_1 = B_2 \cup A_2$ を満たせば $P(B_1) = P(B_2)$.
(4) $\tilde{P} : \tilde{\mathcal{F}} \to [0,1]$ を $\tilde{P}(B \cup A_0) = P(B)$, $B \in \mathcal{F}$, $A_0 \in \mathcal{N}_0$, で定めると、$(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ は確率空間となる．

(演習問題 3- 4 上記の命題を証明せよ．)

$(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の完備化と呼ぶ．

命題 4.12 $\mathcal{N}_0(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}) = \mathcal{N}_0(\mathcal{F}, P)$ となる．特に、$\mathcal{N}_0(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}) \subset \tilde{\mathcal{F}}$ となる．

$\mathcal{N}_0(\mathcal{F}, P) \subset \mathcal{F}$ となる時、$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を完備な確率空間と呼ぶ．

4.4　ブラウニアンフィルトレーション

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を完備な確率空間とする．$\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{F};\ P(B) = 0, 1\}$ とおくと $\mathcal{N}$ は部分 σ-集合族となる．

命題 4.13 X は確率変数、 $c \in \mathbf{R}$ とする．$X = c\ a.s.$ ならば X は $\mathcal{N}$-可測である．

証明. $A \in \mathcal{B}([-\infty, \infty])$ に対して $c \in A$ ならば $P(X^{-1}(A)) = 1, c \notin A$ ならば $P(X^{-1}(A)) = 0$, となるのでいずれの場合も $X^{-1}(A) \in \mathcal{N}$ となり主張を得る．

∎

$B(t) = (B^1(t), \dots, B^d(t)), t \geqq 0$, を d-次元標準ブラウン運動とする．今、$\mathcal{G}_t = \sigma\{B(s);\ s \in [0, t],\ t \geqq 0$, とおき、さらに、$\tilde{\mathcal{G}}_t = \sigma\{\mathcal{G}_t \cup \mathcal{N}\}$, $t \geqq 0$, とおく．

命題 4.14 (1) $t \geqq 0$ に対して $\mathcal{N} \subset \tilde{\mathcal{G}}_t$ であり、$B^i(t)$, $i = 1, \dots, d$, は $\mathcal{G}_t$-可測.
(2) $0 \leqq s < t$, ならば $\tilde{\mathcal{G}}_s \subset \tilde{\mathcal{G}}_t$ であり、$\sigma\{B^i(t) - B^i(s);\ i = 1, \dots, d\}$ と $\mathcal{G}_s$ は独立.
(3) $\tilde{\mathcal{G}}_{t+} = \bigcap_{s>t} \tilde{\mathcal{G}}_s = \tilde{\mathcal{G}}_t$

証明. 主張 (1) と主張 (2) の前半は明らか.

今、$t \geqq 0$ に対して $\mathcal{H}_t = \sigma\{B^i(r) - B^i(t);\ r > t,\ i = 1, \dots, d\}$ とおく．また、$t > s \geqq 0$ に対して $\Delta B^i(s, t) = B^i(t) - B^i(s)$ とおく．

仮定より任意の $t > 0$, $0 = s_0 < s_1 \cdots < s_n = t$, 及び $t = r_0 < r_1 < \cdots < r_m$, に対して $\Delta B^i(s_{k-1}, s_k)$, $i = 1, \dots, d$, $k = 1, \dots, n$, $\Delta B^i(r_{\ell-1}, s_\ell)$, $i = 1, \dots, d$, $\ell = 1, \dots, m$, は独立となる．よって、

$$\mathcal{K}_{s_0, \dots, s_n} = \sigma\{\Delta^i(s_{k-1}, s_k),\ i = 1, \dots, d,\ k = 1, \dots, n\}$$

$$\mathcal{K}_{r_0, \dots, r_m} = \sigma\{\Delta^i(r_{k-1}, r_k),\ i = 1, \dots, d,\ k = 1, \dots, m\}$$

とおくと、命題2.8 より $\mathcal{K}_{s_0, \dots, s_n}$ と $\mathcal{K}_{r_0, \dots, r_m}$ とは独立となる．

さらに

$$\mathcal{A}_{t,0} = \bigcup\{\mathcal{K}_{s_0, \dots, s_n};\ n \geqq 1,\ 0 = s_0 < s_1 \cdots < s_n = t\},$$

$$\mathcal{A}_{t,1} = \bigcup\{\mathcal{K}_{r_0, \dots, r_m};\ m \geqq 1,\ t = r_0 < r_1 \cdots < r_m\}$$

とおくと、$\mathcal{A}_{t,0}$, $\mathcal{A}_{t,1}$ は独立で π-系となる．$\mathcal{G}_t = \sigma\{\mathcal{A}_{t,0}\}$, $\mathcal{H}_t = \sigma\{\mathcal{A}_{t,1}\}$ であるので、命題2.7 より $\mathcal{G}_t$ と $\mathcal{H}_t$ は独立となる．

これより、$\mathcal{G}_t, \mathcal{H}_t, \mathcal{N}$ が独立となることが容易に示されるので、$\tilde{\mathcal{G}}_t$ と $\mathcal{H}_t$ は独立となる．（演習問題3-5 これを証明せよ.）

これより (2) の後半がわかる．

また、$\tilde{\mathcal{H}}_t = \sigma\{\mathcal{H}_t \cup \mathcal{N}_0\}$ とおくと、 $\tilde{\mathcal{G}}_t$ と $\tilde{\mathcal{H}}_t$ も独立となることがわかる．

任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\tilde{\mathcal{G}}_{t+\varepsilon}$ と $\mathcal{H}_{t+\varepsilon}$ は独立．よって、$\tilde{\mathcal{G}}_{t+}$ と $\mathcal{H}_{t+\varepsilon}$ は独立．よって、$\tilde{\mathcal{G}}_{t+}$ と $\bigcup_{\varepsilon>0} \mathcal{H}_{t+\varepsilon}$ は独立．$\bigcup_{\varepsilon>0} \mathcal{H}_{t+\varepsilon}$ は π-系で

$$\mathcal{H}_t = \sigma\{\bigcup_{\varepsilon>0} \mathcal{H}_{t+\varepsilon}\}$$

であるので（演習問題 3-6 これを証明せよ）、命題 2.7 より $\tilde{\mathcal{G}}_{t+}$ と $\mathcal{H}_t$ は独立となる．

今、X は $\tilde{\mathcal{G}}_{t+}$-可測な有界な非負値確率変数とする．また、$\mathcal{A} = \{A \cap B;\ A \in \mathcal{G}_t,\ B \in \tilde{\mathcal{H}}_t\}$ とおく．この時、$\mathcal{A}$ は π-系で $\tilde{\mathcal{G}}_{t+} \subset \sigma\{\mathcal{A}\}$ であることも容易にわかる．

この時、$A \in \mathcal{G}_t,\ B \in \tilde{\mathcal{H}}_t$ に対して

$$E[X, A \cap B] = E[X 1_A 1_B] = E[X 1_A] E[1_B] = E[E[X|\mathcal{G}_t] 1_A] E[1_B] = E[E[X|\mathcal{G}_t] A \cap B]$$

よって命題 1.12 より、

$$E[X, C] = E[E[X|\mathcal{G}_t], C] \qquad C \in \tilde{\mathcal{G}}_{t+}$$

となる．$n \geqq 1$ に対して

$$0 \leqq \frac{1}{n} P(X - E[X|\mathcal{G}_t] > 1/n) = E[\frac{1}{n} 1_{\{X - E[X|\mathcal{G}_t] > 1/n\}}] \leqq E[X, X - E[X|\mathcal{G}_t] > 1/n] = 0$$

より $P(X - E[X|\mathcal{G}_t] > 1/n) = 0$ がわかる．よって $P(X - E[X|\mathcal{G}_t] > 0) = 0$ がわかる．同様にして $P(X - E[X|\mathcal{G}_t] < 0) = 0$ がわかるので $P(X - E[X|\mathcal{G}_t] = 0) = 1$ を得る．

$C = \{X = E[X|\mathcal{G}]\}$ とおくと $P(\Omega \setminus C) = 0, C \in \mathcal{N}$ であり、

$$X = 1_C E[X|\mathcal{G}_t] + 1_{\Omega \setminus C} X$$

であるので、X が $\tilde{\mathcal{G}}_t$-可測であることがわかる．よって $\tilde{\mathcal{G}}_{t+} = \tilde{\mathcal{G}}_t$ が示された．

∎